Ревуцкий А.С. Малинский А.И.

**Модель динамики условной волатильности с объемом торгов**

Волатильность – статистический финансовый показатель, характеризующий изменчивость цены актива и представляет собой меру риска использования финансового инструмента за заданный промежуток времени.

Простые представления о волатильности исходят из того, что случайные изменения цен на каждом временном интервале не зависят друг от друга. Реальное поведение случайных изменений обычно не соответствует данному допущению. Для волатильности характерна, т.н. «кластеризация», т.е. периоды, когда абсолютные значения волатильности принимают большие или меньшие значения. Также в реальных условиях рынка наблюдается гетероскедастичность.

Проблемы учета серий случайных больших выбросов доходностей финансовых инструментов, а также неоднородность случайных ошибок при расчете волатильности можно решить с помощью использования эконометрических моделей, таких как ARCH, GARCH и их различных модификаций.

В данной работе рассмотрим расчет волатильности, используя классическую GARCH- модель, а также модификацию GARCH-модели с добавлением объема торгов, как одного из параметров эконометрической модели. Сделаем предположение о том, что при добавлении данного параметра GARCH-эффект, как правило, исчезает.

Цель данной работы – исследовать справедливость этого предположения в отношении ежедневных доходов от ценных бумаг. Причем будем считать дисперсию в условиях гетероскедастичности. Используя ежедневный объем торговых операций в качестве показателя улучшения модели, мы покажем, что для выборки из 10 наиболее ликвидных российских акций эффект GARCH, как правило, исчезает, когда объем включается в качестве объясняющей переменной в уравнение условной дисперсии.

**Гетероскедастические смешанные модели**

Модель общей авторегрессивной условной гетероскедастичности Боллерслева (1986) ограничивает условную переменную временного ряда зависимостью от квадратов остатков предыдущего временного периода. Такая модель для ежедневного дохода ценных бумаг приведена ниже:

 (1)

где rt– доходность *t*-ой ценной бумаги, – среднее значение rt, зависящее от прошлого периода, L– лаговый оператор, и a0> 0. Если параметры лаговых многочленов и положительны, то скачки волатильности устойчивы во времени. Степень сохранения определяется величиной этих параметров.

Для проверки эмпирических тестов данной работы, пусть обозначает *i*-ое внутридневное увеличение равновесной цены в день t, из чего следует:

Случайная переменная *nt* - смешивающаяся переменная, представляющая стохастический показатель, при котором информация поступает на рынок. Необходимо отметить, что выводится из смеси распределений, где дисперсия каждого распределения зависит от времени поступления информации. Уравнение (4) означает, что ежедневный доход генерируется подчиненным стохастическим процессом, в котором подчинено и nt - направляющий процесс. Если- независимая переменная и одинаково распределенная со средним значением ноль и дисперсией ϭ2, а nt достаточно велико, тогда nt ~ N (0,ϭ2nt). Нормальное распределение следует из центральной предельной теоремы (ЦПТ). Как отмечает Осборн (1959), изменение в nt с течением времени приведет к отклонению от нормального распределения в безусловном распределении, даже если ЦПТ применима.

 Можно объяснить общую авторегрессивную условную гетероскедастичность как проявление зависимости от времени в показателе изменения внутридневных равновесных доходов. Для уточнения доказательства предположим, что ежедневное количество поступлений информации является автокоррелированным, что можно объяснить следующим выражением:

nt = k + b(L)nt-1 + ut, (5)

где k - константа, b(L)- лаговый многочлен порядка q, и ut– белый шум. Изменения смешивающейся переменной сохраняются в соответствии с авторегрессивной структурой b(L). Определим t = E(nt). Как было отмечено выше, если смешанная модель верна, то t = ϭ2nt. Замена представления со скользящим средним (5) в этом выражении для дисперсии дает следующее:

 t = *k*ϭ2+b(L)t-1+ ut (6)

Уравнение (6) представляет тип устойчивости в условной дисперсии, который может быть отобран посредством оценки модели общей авторегрессивной условной гетероскедастичности (GARCH). В частности, изменения в процессе информации приводят к импульсу квадратов остатков ежедневных доходов.

В фокусе внимания наших эмпирических исследований – дисперсия доходов, обусловленная данными о смешивающейся переменной. Так как *nt* обычно не наблюдается, необходим эрзац. Мы выбираем ежедневный объем торговых операций в качестве измерения количества ежедневной информации, поступающей на рынок. Таухен и Питтс (1983) моделируют объем и изменение цены как взаимную (случайную) функцию потока информации. Если эта спецификация верна, то наша оценка будет подвержена смещению неквантованной спецификации. Тем не менее, использование объема в качестве смешивающейся переменной не противоречит модели последовательной информации Копленда (1976) и других и комбинации Эппса и Эппса (1976). В общем, несмотря на неточную роль объема в финансовых исследованиях (Росс 1987), есть основания полагать, что объем содержит информацию о неравновесии динамики рынка активов.

Модель, которая должна получить оценку для каждого вида ценных бумаг в образце, приведена в уравнении (1) и в следующей обобщенной спецификации дисперсии:

Если предположить, что объем (Vt) – смешивающая переменная, то объем слабо обусловлен внешними факторами в том смысле, который имеют в виду Энгл, Хендри и Ричард (1983). Мы ограничиваемся спецификацией GARCH (1, 1), так как было показано, что она является экономной репрезентацией условного распределения, которая адекватно подходит многим экономическим временным рядам (например, Боллерслев 1987). Исчерпывающий показатель сохранения дисперсии, определяемый GARCH есть сумма (а1 + a2): при приближении этой суммы к единице устойчивость скачков волатильности увеличивается.

Смешанная модель предыдущей секции прогнозирует, что a3> 0. Помимо этого, в случае наличия объема с a3> 0, a1 и a2 будут маленькими и статистически незначительными, если ежедневный объем является автокоррелированным. Особенно устойчивость эффекта дисперсии, измеряемого как (а1 + a2), должно стать ничтожным, если учет неравномерного потока информации объясняет наличие GARCH в данных.

Также, в качестве эксперимента, проверим утверждение о том, что если мы будем использовать объем предыдущего временного периода в качестве смешивающейся переменной, то это никак не повлияет на GARCH-эффект. Т.е. a3 0 и a1 и a2 должны остаться без изменений и, соответственно, статистически значительными, даже если ежедневный объем является автокоррелированным.

Чтобы сделать вывод о сравнении указанных моделей, нам необходимо проверять их значимость, причем мы также должны проверять значимость коэффициентов условной авторегрессии в каждой модели. Для этого будем использовать следующие критерии:

Для проверки значимости самих моделей будем использовать функцию максимального правдоподобия:

Соответственно, будем считать значение данной функции для каждой из моделей и сравнивать с критическим значением функции .

Для проверки значимости коэффициентов GARCH-модели, будем использовать t-критерий:

Значение статистики критерия сравнивают с критическим значением tкр(α,n-2), найденным по таблице.

Для проверки значимости коэффициентов GARCH-volume и GARCH-volume(t-1) моделей будем использовать метод Монте-Карло с указанным уровнем значимости.

Эмпирические результаты

В качестве эмпирических данных будем рассматривать ежедневный доход и объем торгов для 10 активных акций. Для активных акций наиболее вероятны достаточно большие количества поступлений информации в день для удовлетворения условий ЦПТ. Наш портфель выбран из множества акций, торгующихся на бирже ММВБ, причем в его состав включены наиболее ликвидные.

Состав рассматриваемого портфеля принимает вид: (Газпром, Лукойл, ВТБ, НЛМК, Ростелеком, Сбербанк, Норникель, Роснефть, Полюсзолото, Аэрофлот). В рассматриваемом эксперименте примем временной период равный 2 годам, т.е. 496 торговым дням.

Таблицы 1 и 2, 3 представляют коэффициенты для моделей условной гетероскедастичности GARCH (1, 1) без учёта объёма торгов (1) и с их учётом (2), с учетом объема предыдущего временного периода(3). Сразу для каждой компании считаем функцию максимального правдоподобия (обозначим ее как LLF в указанных таблицах). Обозначим «\*» значимые коэффициенты.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Компания | α | β | α + β | LLF |
| Газпром | 0,08991\* | 0,88971\* | 0,97962 | 1264,66 |
| Лукойл | 0,066064 | 0,64617\* | 0,712234 | 1339,49 |
| ВТБ | 0,061955 | 0,89519\* | 0,957145 | 1209,83 |
| НЛМК | 0,10014\* | 0,85605\* | 0,95619 | 1101,88 |
| Ростелеком-ао | 0,34188\* | 0,55871 | 0,90059 | 1114,4 |
| Сбербанк | 0,079193 | 0,89255\* | 0,971743 | 1189,68 |
| Норникель | 0,084061\* | 0,88537\* | 0,969431 | 1236,8 |
| Роснефть | 0,091575\* | 0,87338\* | 0,964955 | 1241,6 |
| Полюсзолото | 0,10406 | 0,83694\* | 0,941 | 1342 |
| Аэрофлот | 0,061075 | 0,89811\* | 0,959185 | 1247,1 |

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Компания | α | β | γ | α + β | LLF\_v |
| Газпром | 0,037838 | 6,39E-08 | 0,00092865\* | 0,0378381 | 1299,54 |
| Лукойл | 0,12089 | 0,0000062212\* | 0,00062099\* | 1,21E-01 | 1388,18 |
| ВТБ | 0,075044 | 0,00546 | 0,0010676\* | 0,080504 | 1238,79 |
| НЛМК | 0,094293 | 0,0000028899\* | 0,0033571\* | 0,0942959 | 1109,22 |
| Ростелеком-ао | 0,063108 | 0,00042375 | 0,026773\* | 0,0635318 | 1209,92 |
| Сбербанк | 1,62E-05 | 2,31E-07 | 0,0013021\* | 1,64E-05 | 1225,15 |
| Норникель | 0,14795 | 0,0000017306\* | 0,0011734\* | 0,1479517 | 1260,7 |
| Роснефть | 0,084349 | 9,75E-10 | 0,0012924\* | 0,084349 | 1278,8 |
| Полюсзолото | 0,53592 | 0,094409 | 0,0009272\* | 0,630329 | 1388,8 |
| Аэрофлот | 0,20997 | 0,079139 | 0,0023538\* | 0,289109 | 1267,6 |

Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Компания | α | β | γ | α + β | LLF\_vt-1 |
| Газпром | 0,089884\* | 0,88971\* | 1,53E-16 | 0,979594 | 1266,3 |
| Лукойл | 0,066403 | 0,64618\* | 1,19E-15 | 0,712583 | 1340,8 |
| ВТБ | 0,062052 | 0,89519\* | 1,42E-18 | 0,957242 | 1211,5 |
| НЛМК | 0,10021\* | 0,85605\* | 9,76E-15 | 0,95626 | 1102,1 |
| Ростелеком-ао | 0,33936\* | 0,55836 | 5,20E-16 | 0,89772 | 1119,7 |
| Сбербанк | 7,92E-02 | 0,89255\* | 5,30E-16 | 0,971745 | 1194,7 |
| Норникель | 0,084061\* | 0,88537\* | 0 | 0,969431 | 1236,8 |
| Роснефть | 0,091575\* | 0,87338\* | 0 | 0,964955 | 1241,6 |
| Полюсзолото | 0,46151 | 0,31191\* | 0,00072734\* | 0,77342 | 1343,1 |
| Аэрофлот | 0,15019 | 0,52332\* | 0,0010766\* | 0,67351 | 1247,3 |

Таблица 3

Теперь проверим значимость моделей по каждой компании: сравним значение (2\*(LLF\_v-LLF)) с 99% квантилем распределения , равным 6.64. Результаты представим в Таблице 4, причем значимость равна 1, если модель значима и 0, если нет.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Компания | 2\*(LLF\_v-LLF) | Значимость | 2\*(LLF\_vt-1-LLF) | Значимость |
| Газпром | 69,76 | 1 | 3,28 | 0 |
| Лукойл | 97,38 | 1 | 2,62 | 0 |
| ВТБ | 57,92 | 1 | 3,34 | 0 |
| НЛМК | 14,68 | 1 | 0,44 | 0 |
| Ростелеком-ао | 191,04 | 1 | 10,6 | 1 |
| Сбербанк | 70,94 | 1 | 10,04 | 1 |
| Норникель | 46,4 | 1 |  0  | 0 |
| Роснефть | 74,4 | 1 |  0  | 0 |
| Полюсзолото | 93,6 | 1 | 2,2 | 0 |
| Аэрофлот | 41 | 1 | 0,4 | 0 |

Таблица 4

Заключение

* При добавлении объема торгов в качестве смешивающейся переменной, коэффициент перед объемом a3>0, коэффициенты a1 и a2 - маленькие и статистически незначительные (за исключением компаний Лукойл, НЛМК, Норникель со значимыми значениями a2). Т.о. устойчивость эффекта дисперсии, измеряемого как (а1 + a2), становится ничтожным, это объясняет исчезновение GARCH-эффекта в данных.
* При добавлении объема торгов предыдущего временного периода в качестве смешивающейся переменной напротив, коэффициент перед объемом a30, а коэффициенты a1 и a2 практически не изменяются и соответственно остаются значимыми (за исключением компаний Полюсзолото и Аэрофлот). Т.о. GARCH-эффект остается.
* Функция максимального правдоподобия при добавлении смешивающейся переменной увеличивается, причем устанавливается следующее двойное неравенство:

LLF-GARCH < LLF-GARCH-volume(t-1) < LLF-GARCH-volume

* При добавлении объема торгов в качестве смешивающейся переменной GARCH-эффект пропадает, модель становится значимой и более точной, а при добавлении объема торгов предыдущего временного периода в качестве смешивающейся переменной напротив, модель становится незначимой (кроме исключения с компаниями Ростелеком и Сбербанк), а значит, на практике ее рассматривать смысла не имеет.

**Список литературы**

1. «An investigation into using news analytics data in GARCH type volatility models» -Sergey P. Sidorov, 2011
2. «GARCH and volume effects in the Australian stock markets» - Jingliang Xiao, RobertDBrooks,Wing-KeungWong, http://www.annalsfinancialeconomics.org/4.pdf
3. «Heteroskedasticity in stock return data: volume versus GARCH effect» - C. G. Lamoureux, W.D. Lastrapes, Journal of finance, volume 45, issue 1 (Mar., 1990), 221-229