

«О МОДЕЛИРОВАНИИ СТРУКТУРЫ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ С РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫМ РИСКОМ»

И. Ю. Выгодчикова¹

¹*Саратовский государственный университет, Саратов, Россия*

АННОТАЦИЯ. Рассматриваются задачи моделирования структуры финансовых операций путём равномерного распределения риска, приводятся экономическая интерпретация, рекомендации по области применения и математические взаимосвязи этих задач. Предлагаются способы выбора оценок риска и целесообразности применения ограничений на структурные переменные для нескольких видов операций.

С понятием «мера риска» в математике традиционно связывают некоторый функционал [1], определённый на множестве распределений случайной величины, обладающий определёнными свойствами, среди которых обычно присутствует выпуклость на некотором множестве. Финансовые риски обычно измеряют дисперсией (или среднеквадратическим отклонением) позитивного показателя [2]. Развитие теории современного риск-менеджмента в совокупности с ещё более быстрым распространением электронных бизнес-ресурсов приводит к необходимости расширения трактовки понятия «мера риска».

К примеру, в качестве оценки риска осуществления кредитной операции могут использоваться следующие показатели:

- вероятность невозврата кредита потенциальным заёмщиком - давним клиентом, вычисляемая как отношение общего числа прежних невозвратов плюс один, делённое на общее число прежних обращений в банк (не включая текущего) плюс 2,
- стандартное отклонение позитивного показателя деятельности потенциального заёмщика за несколько периодов,
- вероятность банкротства (для клиентов-юридических лиц), рассчитанную по известной модели (например, по модели Р.Чессера),
- дюрацию возвратных платежей, рассчитанную исходя из эффективной ставки по данному направлению кредитования.

Упоминая о способе оценки риска финансовой операции, нужно помнить, что основным фактором риска является недостаток времени для обдумывания финансового решения. Если объектом управления является не один, а группа финансовых активов, то скорость принятия финансового решения является основным козырем в перспективах управления этой группой (так называемым «финансовым портфелем»).

Последний термин следует применять достаточно осторожно - например, говоря о кредитном портфеле коммерческого банка, обычно подразумевают всю совокупность кредитных договоров. Однако провести математическую оптимизацию для такого объекта, даже в рамках небольшого банка, оказалось, несмотря на многолетнее усердие руководства российских банков по созданию специальных служб экономического анализа для выполнения подобных поручений, просто невозможно. Рано или поздно

аналитики приходили к выводу о необходимости максимального наращивания объёма кредитования путём рационализации процентных ставок по результатам их эконометрического анализа и прогнозирования, с учётом ограничений, диктуемых лишь спросом на кредитные ресурсы со стороны клиентов.

Дело обстоит иначе, если для анализа выбрана целевая группа предприятий, конкурирующих за получение льготных кредитных ресурсов. Для банка подобные проекты могут создать условия долгосрочного сотрудничества с процветающими клиентами, что приведёт к повышению стабильности самого банка. Если процентная ставка для всех клиентов такой группы одина, то проблема сводится к оценке риска вложений путём анализа кредитных историй и перспектив получения прибыли, в конечном итоге выигрывает наименее «проблемный» клиент. Но если процентные ставки разные? Тогда нужно сопоставлять риск вложений с уровнем эффективной ставки по данному направлению кредитования.

Кроме совокупности ссудных операций можно рассматривать совокупность операций с ценными бумагами, совокупность операций по привлечению страховых пассивов, совокупность мероприятий по повышению качества подготовки специалистов и проч.

Пусть θ_i - объёмная доля i – ой операции в совокупности рассматриваемых финансовых операций, n - количество видов операций. Считаем, что к структуре финансовых операций предъявлено одно из следующих требований:

1) заданы ограничения на доли активов b_i , $i = \overline{1, s}$, $s \leq n$, заставляющие инвестора отказаться от подневольного желания «получить высокий доход любой ценой» и учесть неценовые оценки качества активов,

2) заданы минимальные долевые лимиты проведения операций по заданным направлениям $1 \geq a_i \geq 0$, $i = \overline{1, s}$, $s \leq n$.

3) заданы ожидаемые доходности направлений финансирования m_i и требуемая доходность совокупности финансовых операций m_p .

В качестве рискованных показателей σ_i могут выступать среднеквадратические отклонения доходностей, либо иные показатели негативного для инвестора характера.

Требуется равномерно распределить риски (σ_i) между всеми активами, взвесив их по долям активов в портфеле, за счёт выбора этих долей:

$$\Psi(\theta) := \max_{i=1, n} \sigma_i \theta_i \rightarrow \min_{\theta \in D}, \quad (1)$$

где в качестве множества ограничений выступает одно из следующих

множеств:

$$D = \{ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n \theta_i = 1, \sum_{i=1}^n m_i \theta_i = m_p \}, \quad (2)$$

$$D = \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n \theta_i = 1, \theta_i \leq b_i, i = \overline{1, s}\}, \quad (3)$$

$$D = \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n \theta_i = 1, a_i \leq \theta_i, i = \overline{1, s}\}. \quad (4)$$

Для задачи (1)-(2) считаем $m_1 > \dots > m_n > 0$ и $\sigma_1 > \dots > \sigma_n > 0$. Обозначим $\nu = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-1}$, $\gamma = \sum_{i=1}^n m_i \sigma_i^{-1}$, $m_p^* = \gamma / \nu$. Преобразуем:

$$(m_1 - m_n) / \sigma_1 + \dots + (m_{n-1} - m_n) / \sigma_{n-1} = \gamma - m_n \nu > 0, \\ (m_2 - m_1) / \sigma_2 + \dots + (m_n - m_1) / \sigma_n = \gamma - m_1 \nu < 0.$$

Приведём факты из [3, 4].

Теорема 1. В зависимости от m_p , решением задачи (1)-(2) является вектор $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$:

1) при $m_p = m_p^*$, $\theta_i^* = 1 / (\nu \sigma_i)$, $i = \overline{1, n}$.

2) при $m_1 > m_p > m_p^*$, $\theta_i^* = \frac{m_p - m_n}{\sigma_i (\gamma - m_n \nu)}$, $i = \overline{1, n-1}$,

$\theta_n^* = ((m_1 - m_p) / \sigma_1 + \dots + (m_{n-1} - m_p) / \sigma_{n-1}) / (\gamma - m_n \nu)$; если $(\gamma - m_n / \sigma_n) / (\nu - 1 / \sigma_n) < m_p < m_1$, то $\theta_n^* < 0$.

3) при $m_n < m_p < m_p^*$, $\theta_i^* = \frac{m_p - m_1}{\sigma_i (\gamma - m_1 \nu)}$, $i = \overline{2, n}$,

$\theta_1^* = ((m_2 - m_p) / \sigma_2 + \dots + (m_n - m_p) / \sigma_n) / (\gamma - m_1 \nu)$; если $(\gamma - m_1 / \sigma_1) / (\nu - 1 / \sigma_1) > m_p > m_n$, то $\theta_1^* < 0$.

Теорема 2. Решение задачи (1)-(3) ((1)-(4)) существует тогда и только тогда, когда либо $s < n$, либо $s = n$ и $\sum_{i=1}^n b_i \geq 1$ ($1 \geq \sum_{i=1}^n a_i$).

Далее, если только $s = n$, считаем, что $\sum_{i=1}^n b_i \geq 1$, $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1$.

Следующее утверждение очевидно.

Теорема 3. Если для задачи (1)-(3) ((1)-(4)) выполняется неравенство:

$$\min_{j=1, s} (1 / (\sigma_j \nu) - b_j) \leq 0 \quad (\max_{j=1, s} (1 / (\sigma_j \nu) - a_j) \geq 0), \quad (5)$$

то её решением является вектор $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$: $\theta_i^* = 1 / (\sigma_i \nu)$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 4. Пусть $l \in \overline{1, s}$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$\frac{1}{\sigma_l \nu} > b_l > \max_{i=1, s \setminus \{l\}} \frac{b_l / b_i}{1 + \sum_{i=1, i \cap \{l, i\} = \emptyset}^n \frac{\sigma_i}{\sigma_l} + \frac{b_l}{b_i}}. \quad (6)$$

Тогда решением задачи (1)-(3) будет вектор $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$:

$$\theta_l^* = b_l, \theta_i^* = \frac{1 - b_l}{1 + \sum_{j=1, j \cap \{l, i\} = \emptyset}^n \frac{\sigma_i}{\sigma_j}}, \quad i = \overline{1, n} \setminus \{l\}. \quad (7)$$

Теорема 5. Пусть $l \in \overline{1, s}$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$\frac{1}{\sigma_l \nu} < a_l < \min_{i=1, s \setminus \{l\}} \frac{a_l / a_i}{1 + \sum_{i=1, i \cap \{l, i\} = \emptyset}^n \frac{\sigma_i}{\sigma_i} + \frac{a_l}{a_i}}. \quad (8)$$

Тогда решением задачи (1)-(4) будет вектор $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$:

$$\theta_l^* = a_l, \theta_i^* = \frac{1 - a_l}{1 + \sum_{j=1, j \cap \{l, i\} = \emptyset}^n \frac{\sigma_i}{\sigma_j}}, \quad i \in \overline{1, n} \setminus \{l\}. \quad (9)$$

Пример 1 (модель (1)-(4)). Пусть $n=3$, $\sigma_1=5$, $\sigma_2=4$, $\sigma_3=1$, $a_1=0,1$, $a_2=0,2$, $a_3=0,15$. Для данной ситуации можно использовать расчёты в MSExcel (рис. 1). Выполняется (16) для $l=2$ (рис. 2), $\theta^* = (2/15; 1/5; 2/3) \approx (0.13; 0.2; 0.67)$, решение не единственно.

sigma1	5	a1	0,1			1/sigma_1	=1/B2
sigma2	4	a2	0,2			1/sigma_2	=1/B3
sigma3	1	a3	0,15			1/sigma_3	=1/B4
						nu=	=CYMM(G2;G4)
l=2			=D3/D2/(1+B2/B4+D3/D2)	=D2/D4/(1+B4/B2+D3/D4)			
	=1/(B3*G5)	=D3	=MIH(D8;F8)				
	= (1-D3)/(1+B2/B4)	=B12*B2					
	=D3	=B13*B3					
	= (1-D3)/(1+B4/B2)	=B14*B4					
	=CYMM(B12:B14)						

Рис. 1. Шаблон формул MSExcel

sigma1	5 a1	0,1	1/sigma_1	0,2
sigma2	4 a2	0,2	1/sigma_2	0,25
sigma3	1 a3	0,15	1/sigma_3	1
			nu=	1,45
l=2		0,25	0,26315789	
	0,17241379	< 0,2	< 0,25	
	0,13333333	0,666667		
	0,2	0,8		
	0,66666667	0,666667		
	1			

Рис. 2. Итог расчётов в MSExcel

При увеличении объёма информации для прикладных расчётов рекомендуется создавать пользовательские функции на базе MSExcel или любой математической программы (wxmaxima, MatLab и пр.), а также задействовать языковые конструкции на базе этих программ для реализации итерационных процедур и блоков ввода-вывода.

Пример 2 (модель (1)-(3)). Пусть $n=3$, $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 4$, $\sigma_3 = 1$, $b_1 = 0,25$, $b_2 = 0,4$, $b_3 = 0,5$. Выполняется (15) для $l=3$, $\theta^* = (2/9; 5/18; 1/2)$.

Пример 3. (модель (1)-(2), в качестве показателя риска рассматривается вероятность невозврата кредита, рассчитанная на основании истории кредитования клиентов в этом банке). Рассмотрим кредитование 4-х клиентов сроком на 1 год под 21, 18, 15 и 14 % годовых, соответственно, с условием возврата полной суммы кредита и процентов в конце срока. Первый клиент обращается в банк первый раз, следовательно, кредитная история отсутствует, второй клиент обращается в банк в пятый раз и имеет безупречную кредитную историю, третий клиент обращается в банк уже в 14-й раз, но имеет одну проблемную ситуацию возврата кредита, четвёртый клиент обращается в банк уже 29-й раз и проблем с возвратом кредита ни разу не имел. Запрос каждого клиента 800 000 р., причём каждый клиент не откажется и от меньшей суммы кредита. Предположим, что банк оценивает объём свободных ресурсов (долгосрочные депозиты и прибыль от операций на фондовом и валютном рынке, а также прибыль от посреднических, лизинговых, депозитарных и прочих операций) на уровне 800 000 р. Нужно найти объём кредитования каждого клиента, если от проведения этих четырёх операций банк ожидает получить 128 000 р. дохода (16%).

Оценим вероятности невозврата кредита каждым клиентом (σ_i): $1/2$, $1/6$, $2/15$ и $1/30$, соответственно. По теореме 1, находим объём кредитования каждого из 4-х клиентов: 70330 р., 210989р., 263736р. и 254945р.

Приведём рекомендации по области применения моделей

1. Рынок ценных бумаг. Задачи (1)-(3) и (1)-(4) рекомендуется применять инвесторами, имеющими определённые предпочтения относительно структуры портфеля, задача (1)-(2) может служить для сопоставления с портфелем Г. Марковица при использовании таких же или иных оценок риска. Несколько сценариев портфельного инвестирования, особенно анализируемые в динамике, приводят к повышению эффективности качества стратегического управления инвестиционным портфелем.

2. Страхование. Заключение пакета договоров страхования для *страхователя* сопряжено с необходимостью регулярно выплачивать страховые премии страховщику, премия – это произведение, с учётом поправочных коэффициентов, страховой суммы и страхового тарифа. В качестве рискового показателя целесообразно взять вероятность ненаступления страхового случая, и ввести ограничения на доли страхования в общей сумме заключаемых страхователем договоров исходя из его индивидуальных предпочтений. В результате применения модели (1)-(3) можно получить рекомендуемое соотношение долей страхования по выбранным направлениям.

В итоге, конечно, страхователь будет сопоставлять рекомендации со своими текущими финансовыми возможностями и ценностью страхуемых объектов. Рассматривая пакет страховых услуг, предлагаемых *страховщиком*, обычно охватывающий несколько отраслей, можно применить модель (1)-(2), подразумевающая под доходностью страховой услуги отношение разницы между поступившими взносами по договорам данного вида за рассматриваемый период и выплаченными страховыми возмещениями к поступившим страховым взносам, а в качестве искомой доли – отношение полученных страховых взносов по данному виду к общему объёму страховых взносов от рассматриваемой совокупности страховых услуг за данный период. Страхователь задаёт требуемый уровень доходности совокупности страховых услуг (желаемое отношение разницы между объёмом взносов, поступивших от совокупности страховых услуг за рассматриваемый период и выплаченными страховыми возмещениями по совокупности договоров к поступившим страховым взносам). В качестве рискового показателя можно взять стандартное отклонение доходности или количество страховых случаев определенный период по данному виду страхования. В результате страховщик получает рекомендации относительно структуры страховых пассивов и может использовать доступные средства маркетинга для привлечения клиентов к определённым видам страхования.

3. Кредитование. Выше были приведены рекомендации по выбору оценок кредитного риска. В качестве доходности целесообразно выбирать эффективную ставку по данному направлению. При применении задачи (1)-(2) банк задаёт требуемый уровень доходности от проведения рассматриваемой совокупности кредитных операций, для этого, если прогнозы относительно изменения процентных ставок на рынке ссудного капитала обещают относительную стабильность, достаточно взять средневзвешенную эффективную ставку операций кредитования за предыдущий год (в качестве весов могут выступать объёмы кредитования). Задачи (1)-(3) и (1)-(4) требуют лимитирования нескольких направлений кредитования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новоселов А.А. Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения. Новосибирск: Наука, 2001.
2. Четыркин Е.М. Финансовые риски. – М.: «ДЕЛО», 2008.
3. Выгодчикова И.Ю. О формировании портфеля ценных бумаг с равномерно распределённым риском // Математика. Механика: Сб. научн. тр. Саратов: изд-во Саратов. Ун-та, 2010. Выпуск 12, С. 18-20. ISSN 1609-4751.
4. Выгодчикова И.Ю. О задаче равномерного распределения риска финансового портфеля // Математика. Механика: Сб. научн. тр. Саратов: изд-во Саратов. Ун-та, 2011. Выпуск 13, С. 22-25. ISSN 1609-4751.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ, проект НШ (грант № 4383.2010.1).